2018年 東大数学 理系 第1問

$f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$ に対し

$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$

$\displaystyle = \lim_{x \to +0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right)$

$\displaystyle = \lim_{x \to +0}\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} + \cos x\right)$

$\displaystyle = 1 + 1 = 2 \quad \left(\because \lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right)$

$\displaystyle\lim_{x \to \pi - 0} f(x)$

$\displaystyle\lim_{\square \to +0}$ にするために

$x = \pi - t$ とおく.

$\displaystyle\lim_{t \to +0} \frac{\pi - t}{\sin(\pi - t)} + \cos(\pi - t)$

$\displaystyle = \lim_{t \to +0}\left(\frac{\pi - t}{\sin t} - \cos t\right)$

$= +\infty$

より $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to \pi - 0} f(x) = \infty$ //

また、$f(x)$の増減表は

$$f'(x) = \frac{1 \times \sin x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x} - \sin x$$

$$= \frac{\sin x - x \cdot \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \sin^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos^2 x - x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x}$$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

$$= \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$$

ここで $x > 0$ の時 $\sin 2x < 2x$ なので、

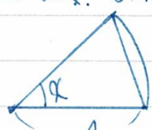
増減表は

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	

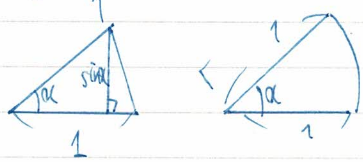
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$x > 0$ の時, $\sin x < x$ の証明.

①



において.



$\frac{1}{2} \times 1 \times \sin x < \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times x \iff \sin x < x$

② $g(x) = x - \sin x$ とおくと $x > 0$ で

$g'(x) = 1 - \cos x > 0$ より $g(x)$は単調増加

$g(0) = 0$ より $x > 0$ で $g(x) = x - \sin x > 0$

$\therefore$ $x > 0$ で $x > \sin x$

よって、$x > 0$ で $\sin 2x < 2x$